

## Correction SIGMA n°2C

**Exercice 1 - Résoudre une équation****Exercice 1A (cours)**

1. On résout l'équation pour  $x \neq \frac{3}{2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-3} = 2 &\iff x+1 = 4x-6 \\ &\iff 3x = 7 \\ &\iff x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{7}{3} \right\}.$$

2. On peut résoudre l'équation  $3x^2 - 4x + 1 = 0$  en utilisant le discriminant  $\Delta = 16 - 12 = 4$ . Cette équation à donc deux solutions

$$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+2}{6} = 1$$

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$ .

**Exercice 1B (Application)**

1. On résout l'équation en posant  $X = x^2 \geq 0$ ,

$$3x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \iff 3X^2 - 4X + 1 = 0 \quad \text{et} \quad X \geq 0$$

On utilise le discriminant  $\Delta = 16 - 12 = 4$ . Cette équation à donc deux solutions

$$X_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4+2}{6} = 1$$

On a donc 4 solutions possibles

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ -1; -\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}; 1 \right\}.$$

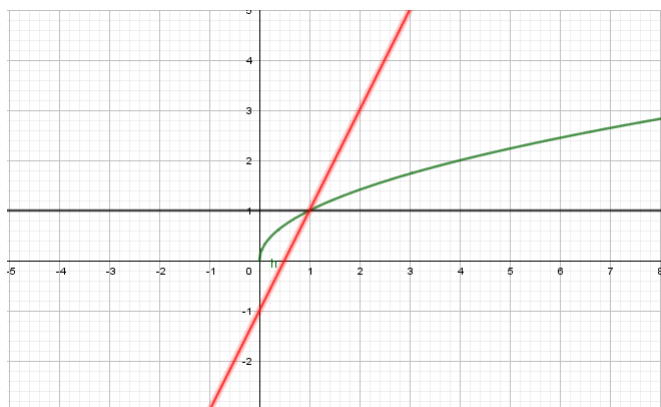
2. On résout l'équation

$$\begin{aligned} xe^{2x-5} = x &\iff xe^{2x-5} - x = 0 \\ &\iff x(e^{2x-5} - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{2x-5} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{2x-5} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

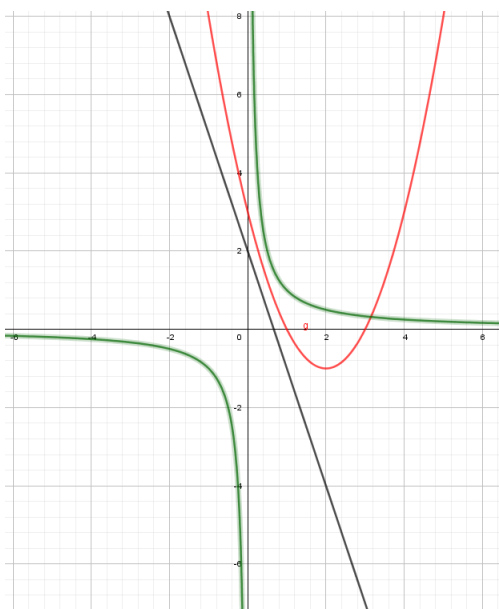
L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_2 = \left\{ 0; \frac{5}{2} \right\}$ .

## Exercice 2 - Tracer des courbes

### Exercice 2A (cours)



### Exercice 2B (Application)



## Exercice 3 - Déterminer le domaine de définition d'une fonction

### Exercice 3A (cours)

1. On résout l'équation  $x^2 - 4x = 0$  :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x = 0 &\iff x(x - 4) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{et} \quad x = 4 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}}$$

2. On résout l'équation  $x^2 - 9 \geq 0 \iff (x - 3)(x + 3) \geq 0$ . A l'aide d'un tableau de signe, on conclut que

L'ensemble de définition de  $g$  est  $D_g = ]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

3. On résout l'équation

$$x - 4 > 0 \iff x > 4$$

Donc

L'ensemble de définition de  $h$  est  $D_h = ]4; +\infty[$

### Exercice 3B (Application)

1. Afin de déterminer le domaine de définition de  $f$ , on résout  $x - 2 > 0 \iff x > 2$  et on résout  $\ln(x - 2) = 0 \iff x - 2 = 1 \iff x = 3$ . Donc la fonction  $f$  est définie sur

$$D_f = ]2, 3[ \cup ]3, +\infty[.$$

2. La fonction  $\ln$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ . On résout donc  $x^2 - 4 \geq 0 \iff (x - 2)(x + 2) \geq 0$ . A l'aide d'un tableau de signe, on conclut que les solutions de cette inéquation est  $] -\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

L'ensemble de définition de  $g$  est  $D_g = [2; +\infty[$

3. On résout l'équation

$$\frac{x^2 + 3}{e^x - 1} > 0$$

Le numérateur est toujours positif, on résout donc  $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$  Donc

L'ensemble de définition de  $h$  est  $D_h = \mathbb{R}_+^*$

## Exercice 4 - Manipuler des valeurs absolues

### Exercice 4A (cours)

1. On résout l'équation

$$\begin{aligned} |x + 2| = 3 &\iff x + 2 = 3 \quad \text{ou} \quad x + 2 = -3 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_1 = \{-5; 1\}$ .

2. On résout l'équation  $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$  et  $2 - 2x \geq 0 \iff x \leq 1$ . On a donc 3 cas :

(a) **Cas où  $x < -1$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x + 1| - |2 - 2x| = 2 &\iff -(x + 1) - (2 - 2x) = 2 \\ &\iff x - 3 = 2 \\ &\iff x = 5 \end{aligned}$$

Or  $5 > -1$ , donc cette équation n'a aucune solution sur cet intervalle.

(b) **Cas où**  $-1 \leq x < 1$  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x+1| - |2-2x| = 2 &\iff (x+1) - (2-2x) = 2 \\ &\iff 3x - 1 = 2 \\ &\iff 3x = 3 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Or  $1 \geq 1$ , donc cette équation n'a aucune solution sur cet intervalle.

(c) **Cas où**  $1 \leq x$  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x+1| - |2-2x| = 2 &\iff x+1 + (2-2x) = 2 \\ &\iff -x + 3 = 2 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Il y a alors une solution sur  $[1; +\infty[$  :  $x = 1$ .

Au final l'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_2 = \{1\}$ .

3. D'après le cours, une valeur absolue est toujours positive donc

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_3 = \mathbb{R}[$ .

### Exercice 4B (Application)

1. D'après le cours, une valeur absolue est toujours positive donc

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}[$ .

2. Afin de voir quels sont les cas possibles, on utilise le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $x+2$	-	0	+	+
Signe de $3x-1$	-	-	0	+

(a) **1er Cas** :  $x < -2$ . Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont négatives. Donc

$$\begin{aligned} |3x-1| < |x+2| &\iff -(3x-1) < -(x+2) \\ &\iff -3x+1 < -x-2 \\ &\iff 3 < 2x \\ &\iff \frac{3}{2} < x \end{aligned}$$

On en déduit qu'il n'y a aucune solutions sur cet intervalle.

(b) **2nd Cas** :  $-2 \leq x < \frac{1}{3}$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |3x-1| < |x+2| &\iff -(3x-1) < x+2 \\ &\iff -3x+1 < x+2 \\ &\iff -1 < 4x \\ &\iff x > -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que l'intervalle,  $\left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right]$  est solution.

- (c) **3ème Cas** :  $x \geq \frac{1}{3}$ . Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont positives. Donc

$$\begin{aligned} |3x - 1| < |x + 2| &\Leftrightarrow (3x - 1) < (x + 2) \\ &\Leftrightarrow 2x < 3 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que l'intervalle,  $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right[$  est solution.

En conclusion, l'ensemble des solutions est  $\left]-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right[$

3. On résout l'équation  $|x^2 - 1| - |2x - 4| = 0$ . Afin de voir quels sont les cas possibles, on utilise le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$
Signe de $x^2 - 1$	+	0	-	0	+
Signe de $2x - 4$	-	-	-	0	+

- (a) **1er Cas** :  $x \in ]-\infty; -1] \cup [1, 2]$ . On s'aperçoit que dans ces deux cas,  $x^2 - 9$  est positif et  $2x - 6$  est négatif. Donc

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| - |2x - 4| = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 1) + (2x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 + 2x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant lié à cette équation du second degré est  $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-5) = 24$ . Les deux solutions sont alors  $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} = -1 - \sqrt{6}$  et  $x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} = -1 + \sqrt{6}$ . On a évidemment  $x_1 < -1$  et de plus

$$2 < \sqrt{6} < 3 \iff 1 < -1 + \sqrt{6} < 2$$

On en déduit que sur ces intervalles, l'équation a deux solutions  $-1 - \sqrt{6}$  et  $-1 + \sqrt{6}$ .

- (b) **2nd Cas** :  $-1 \leq x \leq 1$ . Dans ce cas, les deux quantités sont négatives.

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| - |2x - 4| = 0 &\Leftrightarrow -(x^2 - 1) + (2x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 1 + 2x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-3) = -8$ . Cette équation n'a pas de solutions sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que sur cet intervalle, l'équation n'a aucune solution.

- (c) **4ème Cas** :  $2 < x$ . Dans ce cas, les deux quantités sont positives.

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| - |2x - 4| = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 1) - (2x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 3 = -8$  On en déduit que sur cet intervalle, l'équation n'a aucune solutions

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est  $\mathcal{S}_3 = \{-1 - \sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}\}$ .

## Exercice 5 - Déterminer la formulation explicite des suites classiques.

### Exercice 5A (cours)

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = -1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 6$ . On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation  $x = 3x - 6$

$$x = 3x - 6 \iff 2x = 6 \iff x = 3$$

On pose alors la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - 3$ . On vérifie que la suite  $(v_n)$  est géométrique. En effet

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 3u_n - 6 - 3 \\ &= 3(u_n - 3) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison 3. De plus  $v_0 = u_0 - 3 = -4$ . Nous avons donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = -4 \times 3^n$ . On en déduit donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -4 \times 3^n + 3.}$$

2.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_0 = 1$ ,  $v_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 4v_n - 3v_{n-1}$ . On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation

$$x^2 = 4x - 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$$

Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 16 - 12 = 4$ . Les solutions de ces équations sont

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Cette équation ayant deux solutions, la suite s'écrit explicitement

$$v_n = \alpha \times 1^n + \beta \times 3^n$$

En s'aidant des valeurs de  $v_0$  et de  $v_1$ , on en déduit le système suivant

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha + 3\beta &= 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ 2\beta &= 1 \end{cases} \quad L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}.}$$

### Exercice 5B (Application)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= 4u_n + 5^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire  $v_n = \frac{u_n}{5^n}$  pour tout  $n \geq 0$ . On considère pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4u_n + 5^n}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4}{5^{n+1}}u_n + \frac{5^n}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{u_n}{5^n} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5}v_n + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc arithmético-géométrique. On note que  $v_0 = \frac{1}{5}$ . On résout alors l'équation

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \iff \frac{1}{5}x = \frac{1}{5} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

On pose alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $w_n = v_n - 1$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 1 \\ &= \frac{4}{5}v_n + \frac{1}{5} - 1 \\ &= \frac{4}{5}v_n - \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5}(v_n - 1) \\ &= \frac{4}{5}w_n \end{aligned}$$

La suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{4}{5}$  et de premier terme  $w_0 = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5}$ . On a alors

$$w_n = -\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = w_n + 1 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

et finalement pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = 5^n v_n = 5^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 5^n - 4^n$$

## Exercice 6 - Exprimer des évènements en fonction d'intersection, d'union et du complémentaire.

### Exercice 6A (cours)

Une urne contient 6 boules noires et 4 boules vertes. On tire 4 boules sans remise dans cette urne. Soit  $A_i$  l'évènement "On obtient une boule verte au  $i^{\text{ème}}$  tirage" pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . On exprime les évènements suivants en fonction des  $A_i$  :

1.  $B_1$  : "On obtient la première boule verte au premier tirage"

$$B_1 = A_1$$

2.  $B_2$  : "On obtient la première boule verte au second tirage"

$$B_2 = \overline{A_1} \cap A_2$$

3.  $B_4$  : "On obtient la première boule verte au quatrième tirage"

$$B_4 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4$$

On exprime les évènements  $C_i$  en fonction des  $A_j$  puis en fonction des  $B_j$

1.  $C_4$  : "On obtient 4 boules vertes"

$$C_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$$

2.  $C_1$  : "On obtient une seule boule verte"

$$C_1 = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4)$$

ou bien

$$C_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

3.  $C_0$  : "On n'obtient aucune boule verte"

$$C_0 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4}$$

### Exercice 6B (Application)

On lance  $n$  fois un dé à 6 faces et on note  $A_i$  l'évènement, "on obtient un 6 au  $i$ ème tirage". Exprimez les évènements suivants en fonction des  $A_i$  :

1.  $B_1$  : "On obtient le premier 6 au premier tirage."

$$B_1 = A_1$$

2.  $B_2$  : "On obtient le premier 6 au second tirage."

$$B_2 = \overline{A_1} \cap A_2$$

3. Pour tout  $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$ ,  $B_k$  : "On obtient le premier 6 au  $k$ -ème tirage."

$$B_k = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

4.  $C$  : "On n'obtient que des 6".

$$C = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

5.  $D$  : "On obtient au moins un 6".

$$D = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

6.  $E$  : "On n'obtient aucun 6".

$$E = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

7.  $F$  : "On obtient le second 6 au troisième tirage".

$$F = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$$

8.  $G$  : "On obtient le second 6 au  $k$ -ième tirage".

$$G = \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_i \cap \overline{A_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

## Exercice 7 - Déterminer la probabilité d'une union finie.

On a dix cartes numérotés de 1 à 4. On tire successivement 3 cartes avec remise dans cette urne on note les évènements  $A_i$  : " Tirer la carte n° 1 au  $i^{\text{ème}}$  tirage". On définit enfin les évènements  $B_i$  : "On obtient au moins une carte n° 1 lors des  $i$  premiers tirages". On a  $B_1 = A_1$  donc

$$P(B_1) = P(A_1) = \frac{1}{4}.$$

On a  $B_2 = A_1 \cup A_2$ . Les évènements  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas disjoints (mais ils sont indépendants) donc on utilise le crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Enfin,  $B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . Les évènements  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  ne sont pas disjoints (mais ils sont indépendants) donc on utilise le crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{16} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{37}{64} \end{aligned}$$

### Exercice 7B (Application)

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer  $n$  lancers d'une pièce non truquée.

1. Afin de calculer la probabilité de l'évènement  $C$ , on introduit les évènements  $A_k$  : "On obtient pile au  $k^{\text{ème}}$  tirage". Alors on a  $C = (A_1 \cap A_n)$ . En appliquant les formules du cours (on rappelle que les évènements  $A_1$  et  $A_n$  sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 \cap A_n) \\ &= P(A_1) \times P(A_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. On considère les évènements  $D$  : "Les tirages 1 et 2 amènent chacun un pile",  $E$  : "Les tirages 2 et 3 amènent chacun un pile" et  $F$  : "Les tirages 3 et 4 amènent chacun un face". On utilise alors le

crible de Poincaré sachant que

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P(E) &= P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P(F) &= P(\overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P(D \cap E) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
 P(D \cap F) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

Enfin  $P(E \cap F) = P(A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = 0$  et de même  $P(D \cap E \cap F) = P(D \cap E) = 0$ . On a alors d'après le crible de Poincaré,

$$\begin{aligned}
 P(D \cup E \cup F) &= P(D) + P(E) + P(F) - P(D \cap E) - P(D \cap F) - P(E \cap F) + P(D \cap E \cap F) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - 0 + 0 \\
 &= \frac{9}{16}
 \end{aligned}$$

## Exercice 8 - Utiliser la formule des probabilités totales.

### Exercice 8A (cours)

En 2020, 75% des Français de plus de 18 ans ont regardé des vidéos Youtube. Une entreprise, pour sa nouvelle marque "ECEOne" décide de procéder à une stratégie publicitaire sur Youtube. 75% des utilisateurs de Youtube entendent parler de "ECEOne". 10% des personnes n'utilisant pas Youtube ont tout de même entendu parler de cette nouvelle marque (Le fameux bouche à oreille). On interroge au hasard un français majeur.

- On introduit les événements  $Y$  : "Le Français interrogé est un utilisateur de Youtube" et  $E$  : "Le Français interrogé a entendu parler de la marque "ECEOne". On cherche alors la probabilité (donnée dans l'énoncé)

$$P_Y(E) = \frac{3}{4}.$$

- On cherche la probabilité  $P(Y \cap E)$ . En utilisant la formule des probabilité composée

$$P(Y \cap E) = P(Y) \times P_Y(E) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

- Les événements  $(Y, \overline{Y})$  forment un système complet d'évènement, donc en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(Y) \times P_Y(E) + P(\overline{Y}) \times P_{\overline{Y}}(E) \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} \\
 &= \frac{45}{80} + \frac{2}{80} \\
 &= \frac{47}{80}
 \end{aligned}$$

4. On sait maintenant que l'utilisateur a entendu parler de la marque "ECEOne". On cherche  $P_E(Y)$ .  
En utilisant la formule de Bayes

$$\begin{aligned}
 P_E(Y) &= \frac{P(E \cap Y)}{P(E)} \\
 &= \frac{9}{\frac{16}{47}} \\
 &= \frac{9 \times 47}{16} \\
 &= \frac{423}{16}
 \end{aligned}$$

### Exercice 8B (Application)

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

- Si l'on tire un carreau, on lance un dé à 4 faces.
- Si l'on tire un coeur, on lance un dé à 6 faces.
- Si l'on tire un trèfle, on lance un dé à 10 faces.
- Si l'on tire un pique, on lance un dé à 12 faces.

On note les évènements  $Ca, Co, Tr, Pi$  les évènements obtenir un carreau, un coeur, un trèfle ou un pique (respectivement). On note pour  $j \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$ , l'évènement  $A_j$  " Obtenir  $j$  sur le dé lancé.

1. Les évènements  $(Ca, Co, Tr, Pi)$  forment un système complet d'évènements donc on utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(A_1) &= P(Ca)P_{Ca}(A_1) + P(Co)P_{Co}(A_1) + P(Tr)P_{Tr}(A_1) + P(Pi)P_{Pi}(A_1) \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{48} \\
 &= \frac{15}{240} + \frac{10}{240} + \frac{6}{240} + \frac{5}{240} \\
 &= \frac{36}{240} \\
 &= \frac{3 \times 3 \times 4}{4 \times 3 \times 20} \\
 &= \frac{3}{20}
 \end{aligned}$$

2. De la même façon,

$$\begin{aligned}
 P(A_8) &= P(Ca)P_{Ca}(A_8) + P(Co)P_{Co}(A_8) + P(Tr)P_{Tr}(A_8) + P(Pi)P_{Pi}(A_8) \\
 &= \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} \\
 &= \frac{1}{40} + \frac{1}{48} \\
 &= \frac{6}{240} + \frac{5}{240} \\
 &= \frac{11}{240}
 \end{aligned}$$

3. Si l'on tire un carreau, on lance un dé à 4 faces. Cet évènement est impossible et donc

$$\boxed{P_{A_8}(Ca) = 0}$$

4. On utilise la formule de Bayes pour calculer  $P_{A_1}(Ca)$  :

$$\begin{aligned} P_{A_1}(Ca) &= \frac{P(Ca)P_{Ca}(A_1)}{P(A_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{20}} \\ &= \frac{4 \times 5}{4 \times 4 \times 3} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

## Exercice 9 - Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.

### Exercice 9A (cours)

1. Soit  $x \geq 0$ . On a l'équivalence  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x \iff 1+x \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$  (car  $x+1 \geq 0$  et  $1+x/2 \geq 0$ ).  
On a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x &\iff 1+x \leq 1+x + \frac{x^2}{4} \\ &\iff 0 \leq \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .

$$\boxed{\text{En conclusion, } \forall x \geq 0, \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{1}{2}x.}$$

2. On a alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{k+1} &\leq 1 + \frac{k}{2} \\ \implies \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} &\leq \sum_{k=0}^n 1 + \frac{k}{2} \\ \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} &\leq \sum_{k=0}^n 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k \\ \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} &\leq n+1 + \frac{n(n+1)}{4} \\ \implies \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} &\leq \frac{(n+4)(n+1)}{4} \end{aligned}$$

**Exercice 9B (Application)**

1. On a

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$$

Or pour tout  $x \geq 2$ , on a  $x^2 \geq x^2 - x$  et donc  $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2-x}$ . On conclut

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

2. On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}}$$

**Exercice 10 - Calculer des limites avec indétermination.****Exercice 10A (cours)**

1. En factorisant par le terme de plus haut degré, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 + 3x^2 - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

2. En appliquant les croissances comparées, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{(\ln(x))^5} = +\infty}$$

3. En factorisant au numérateur et au dénominateur, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 5x}{2x^4 + x^3 - 3x + 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left( 1 - \frac{x^2}{x^4} + 5 \frac{x}{x^4} \right)}{2x^4 \left( 1 + \frac{x^3}{x^4} - \frac{3x}{x^4} + \frac{5}{x^4} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} + 5 \frac{1}{x^3}}{2 \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^4} \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. D'après les formules de taux d'accroissements, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

### Exercice 10B (Application)

1. On calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+2}}{(\ln(x))^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 \frac{e^{2x}}{x} \times \frac{x}{(\ln(x))^3}$$

Or d'après les croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln(x))^3} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+2}}{(\ln(x))^3} = +\infty$$

2. En factorisant par  $e^x$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 + 1 = e^x \left( 1 - \frac{x^3}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$  par croissances comparées. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 + 1 = +\infty$$

3. En passant par les quantités conjuguées, pour  $x$  suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x-4} - \sqrt{x})(\sqrt{x-4} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x-4-x}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} + \sqrt{x} = +\infty$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} - \sqrt{x} = 0$$

4. A l'aide du changement de variable  $X = x^2$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^{3/2}}{e^X}$$

Donc, par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = 0$$

5. En appliquant le changement de variable  $X = e^x$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow \ln(2) \\ >}} \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x} - 4e^x + 4} &= \lim_{\substack{X \rightarrow 2 \\ >}} \frac{X^2 - 4}{X^2 - 4X + 4} \\ &= \lim_{\substack{X \rightarrow 2 \\ >}} \frac{(X - 2)(X + 2)}{(X - 2)^2} \\ &= \lim_{\substack{X \rightarrow 2 \\ >}} \frac{X + 2}{X - 2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

6. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x - 1}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  par taux d'accroissement donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ . On a donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = +\infty$$

## Exercice 11 - Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire

### Exercice 11A (cours)

On considère une variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$k$	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

1. A l'aide de la formule sur l'espérance, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times P(X = -1) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

2. A l'aide de la formule de transfert,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2 \times P(X = -1) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{11}{4} - \frac{25}{16} \\ &= \frac{19}{16} \end{aligned}$$

### Exercice 11B (Application)

Un joueur participe au jeu suivant. On lance 3 fois de suites une pièce de monnaie non truquée. Le joueur gagne  $j$  euros si la pièce donne pile pour la première fois au  $j$  ème lancer. Si la pièce ne donne jamais pile, le joueur perd 1 euros. On note  $X$  la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

1. On détermine le support  $X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}$  On note pour  $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , l'évènement  $A_j$  : "Le  $j$ -ième lancer donne Pile". Les évènements  $(A_j)$  sont mutuellement indépendants donc

$$P(X = 1) = P(A_1) = \frac{1}{2}$$

De même,

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 3) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Enfin, pour  $P(X = -1)$ , on peut soit calculer

$$P(X = -1) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

soit

$$P(X = -1) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \frac{1}{8}$$

Le tableau de probabilité est donc

$k$	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2. A l'aide de la formule sur l'espérance, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times P(X = -1) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

3. A l'aide de la formule de transfert,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2 \times P(X = -1) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{7}{4} - \frac{25}{16} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

## Exercice 12 - Inverser une matrice.

### Exercice 12A (cours)

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & -4 \end{array} \right) \quad L_1 - 4L_2 \rightarrow L_2 \end{array}$$

La matrice  $A$  est inversible car les pivots sont non nuls.

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc|cc} 36 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & 1 & -4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 9L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ . \end{array} \\ \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{9}(2 & 1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{9}(1 & -4) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} (1/36)L_1 \rightarrow L_1 \\ (1/9)L_2 \rightarrow L_2 \end{array} \end{array}$$

On obtient alors

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 & 3 \end{array} \right) \quad L_2 + 3L_3 \rightarrow L_3 \end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaitre 3 pivot dont un est nul.

La matrice  $B$  n'est pas inversible.

### Exercice 12B (Application)

1. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 5 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 4 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 5 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\
 4 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 3 & 3 & 1 & -5 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -17 & 3
 \end{array} \right) \quad L_2 + 3L_3 \rightarrow L_3
 \end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaître 3 pivot dont un est nul.

La matrice  $B$  n'est pas inversible.

2. On calcule l'inverse de la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 6 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 6 & 2 & 2 & 0 & -1
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ 2L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 6 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\
 0 & 6 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 6L_1 - 4L_2 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 6 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\
 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -3 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1
 \end{array} \right) \quad L_2 - 3L_3 \rightarrow L_2 \\
 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{6}L_1 \rightarrow L_1 \\ \frac{1}{6}L_3 \rightarrow L_3 \end{array}
 \end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls,

la matrice  $C$  est inversible et  $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 13 - Montrer qu'une fonction est continue en un point.

### Exercice 13A (cours)

1. Pour cette première fonction, on a  $f(0) = 1$ . Or en appliquant les taux d'accroissement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 = f(0)$$

La fonction  $f$  est donc continue en 0.

2. Pour la seconde fonction,  $g(0) = e^0 - 1 = 0$  On calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0}^< g(x) = \lim_{x \rightarrow 0}^< \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0}^> g(x) = \lim_{x \rightarrow 0}^> e^x - 1 = 0$$

La fonction  $g$  n'est donc pas continue en 0.

### Exercice 13B (Application)

1. Pour cette première fonction, on a  $f(0) = 0$ . Et par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 \ln(x) = 0$$

Donc, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

La fonction  $f$  est continue en 0.

2. La fonction  $g$  vérifie  $g(0) = 1$ . On calcule donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0}^< g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0}^< \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0}^< \frac{x(x^2 + x - 1)}{x(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0}^< \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a également, en posant  $X = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0}^> \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} &= \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 e^{-X} \\ &= 0 \end{aligned}$$

par croissance comparée.

Donc La fonction n'est pas continue en 0.

3. On a pour tout  $x \in ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$ ,

$$\frac{x - \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{x}{\ln(x+1)} - 1$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  par taux d'accroissement donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = 0$$

Donc la fonction

$h$  est prolongeable par continuité en 0 et on pourrait poser  $h(0) = 0$ .

## Exercice 14 - Écrire un script qui utilise une instruction conditionnelle.

### Exercice 14A (cours)

Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur le nombre d'heures de Scilab travaillée pendant les vacances et qui affiche le message "beau travail" si le nombre d'heures travaillées est supérieur ou égal à 3 heures et le message "C'est insuffisant !" sinon.

```
h = input("Entrez le nombre d'heure de travail sur Scilab pendant les vacances")
if h >=3 then
    disp("Beau travail")
else
    disp("C'est insuffisant")
end
```

### Exercice 14B (Application)

Écrire un Script Scilab qui :

- Demande à l'utilisateur d'entrer 3 nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
- Calcule la ou les solutions de  $ax^2 + bx + c = 0$ . (On fera des disjonctions de cas appropriés selon les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ ).
- Affiche la ou les solutions ou affiche un message d'erreur s'il n'y a aucunes solutions.

```
a = input("Entrez un nombre a: ")
b = input("Entrez un nombre b: ")
c = input("Entrez un nombre c: ")
delta = b^2 - 4*a*c

if a == 0 then
    if b == 0 then
        if c==0 then
            disp("Il y a une infinité de solutions")
        else
            disp("Il n'y a aucune solutions")
        end
    else
        x = -c/b
        disp("La seule solution est " +string(x))
    end
end
```

```

end
else
  if delta > 0 then
    x1 = (-b - sqrt(delta))/(2*a)
    x2 = (-b + sqrt(delta))/(2*a)
    disp("Il y a deux solutions: " + string(x1) + " et " + string(x2))
  elseif delta == 0 then
    x = -b/(2*a)
    disp("Il y a une unique solution: " + string(x) + ".")
  else
    disp("L'équation n'a aucune solutions")
  end
end

```

## Exercice 15 - Calculer une somme (Scilab).

### Exercice 15A (cours)

On considère la somme  $S = \sum_{k=0}^{95} k e^{-k^2}$ . Écrire un script Scilab qui calcule et affiche le résultat de la somme  $S$ .

```

S = 0
for k = 0:95
  S = S+k*exp(-k^2)
end
disp(S)

```

### Exercice 15B (Application)

On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  et la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Écrire un script Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre entier  $n$  puis qui calcule et affiche  $S_n$ .

```

n = input("Entrez un nombre entier n")
u = 1
S = u
for k = 1:n
  u = u * exp(-u)
  S = S + u
end
disp(S)

```

## Exercice 16 - Tracer le graphe représentatif d'une fonction (Scilab).

### Exercice 16A (cours)

On considère la fonction  $f : x \rightarrow \ln(x + 1) - \sqrt{x}$ . Écrire une fonction Scilab modélisant la fonction  $f$  puis écrire le code permettant de représenter la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 5]$  (on prendra au minimum 5000 points pour tracer la fonction)

```

function y = f(x)

```

```
y = log(x+1) - sqrt(x)
endfunction
```

```
x = linspace(0,5,5000)
plot(x,f)
```

### Exercice 16B (Application)

On considère la fonction  $f : x \mapsto \ln(x+1) - \sqrt{x}$  et on considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + f(u_n)$ .

1. Écrire une fonction Scilab modélisant la fonction  $f$ .

```
function y = f(x)
    y = log(x+1) - sqrt(x)
endfunction
```

2. Mettre dans une matrice  $U$  colonne ou ligne les résultats de  $u_0, u_1, \dots, u_{50}$ .

```
U = zeros(1,51)
U(1) = 2
U(2) = 3
for k = 1:49
    U(k+2) = U(k+1) + f(U(k))
end
```

3. Représenter les 50 premiers éléments de la suite sur un graphique (On prendra en abscisse les entiers de 0 à 50).

```
X = 0:50
plot2d(X,U)
```